Concours CAE session 2013

Composition : Mathématiques 1 (algèbre, analyse)

Durée : 2 Heures

Le sujet comporte quatre (4) exercices indépendants. Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice N°1 :

$\mathbb{C}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients complexes. Soit $P = X^3 + X - 1$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. On note x_k avec $k \in \{1, 2, 3\}$, les trois racines complexes de P.

1. Vérifier (sans chercher à les calculer) que les trois racines de P sont distinctes.
2. En utilisant la division euclidienne de X^5 par P, calculer la valeur de la somme :

$$S = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$$

Exercice N°2 :

Soit la fonction g définie sur par :

$$g(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\, dt$$

1. Montrer que la fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
2. Etudier la parité de g.
3. Montrer que pour tout $x \in [0, \pi/2]$, $1 - x^2 \leq \cos x \leq 1$.
4. Prolonger g par continuité en 0 et montrer que g ainsi prolongée est dérivable en 0.
5. Calculer :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x)$$

Exercice N°3 :

Soit f une fonction définie de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, continue, décroissante et telle que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) \sin t\, dt \quad et \quad J = \int_0^{+\infty} f(t) \sin t\, dt\ .$$

1. Montrer que la série de terme général u_n est une série alternée.
2. Montrer que : $|u_n| \leq \pi f(n\pi)$.
3. Montrer que la série de terme général u_n est convergente.
4. Montrer que l'intégrale J est convergente et calculer sa valeur pour $f(x) = e^{-x}$.

Exercice N°4 :

On désigne par $M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
On donne la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

et on définit l'application ϕ_A de $M_2(\mathbb{R})$ dans $M_2(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in M_2(\mathbb{R}),\ \ \phi_A(M) = AM - MA$$

1. Calculer A^2. En déduire un polynôme annulateur de A , le plus simple possible.
2. Prouver que A est diagonalisable et déterminer une matrice inversible P de $M_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $M_2(\mathbb{R})$ dont la première colonne est nulle telles que :

   $$A = PDP^{-1}$$

   Donner la matrice P^{-1} .
3. Montrer que ϕ_A est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$.
4. Etablir que $X^3 - X$ est un polynôme annulateur de ϕ_A . En déduire les valeurs propres possibles de ϕ_A .
5. Montrer que la matrice M est un vecteur propre de ϕ_A associé à la valeur propre λ si et seulement si la matrice $N = P^{-1}MP$ est non nulle et vérifie l'équation :

   $$DN - ND = \lambda N$$

6. On pose : $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$.

   a. Trouver l'ensemble des matrices N telles que $DN - ND = 0$.
   b. En déduire que la famille $(A\ ,B)$ est une base de $Ker\phi_A$, le sous-espace propre de ϕ_A associé à la valeur propre 0.
   c. Déterminer les deux autres valeurs propres non nulles λ_1 et λ_2 de ϕ_A et caractériser les matrices N associées.
   d. Déterminer une base de chaque sous-espace propre $V(\lambda_1)$ et $V(\lambda_2)$ de ϕ_A associé aux valeurs propres λ_1 et λ_2 .

7. L'endomorphisme ϕ_A est-il diagonalisable ?